ALGEBRA

Terme 1

Termumformungen
(ohne binomische Formeln)

Datei Nr. 12101

Stand 16. Oktober 2014

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Inhalt

DATEI 12101

Diese Texte zu Termen gibt es in der Mathematik-CD

1. Zahlenterme und ihre Berechnung

Ein Term ist eine **Berechnungsvorschrift**, die Zahlen und Rechenzeichen enthält.

Beispiele: $8+2\cdot 5$ und $(8+2)\cdot 5$

$3\cdot 5^2$ und $(3\cdot 5)^2$

$\frac{3}{4}\cdot 8-\frac{2}{3}\cdot 5$

$5\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)+2\cdot\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{2}\right)$

Zu jedem dieser Terme kann ein Wert berechnet werden. Dazu gibt es die bekannten **Rechenregeln**:

(1) **Punkt vor Strich:** In $8+2\cdot 5$ wird zuerst das Produkt $2\cdot 5=10$ berechnet, und nicht $8+2=10$.

Richtig: $8+2\cdot 5=8+10=18$
Falsch: $8+2\cdot 5=10\cdot 5=50$

(2) Soll die Summe vor dem Produkt berechnet werden, muss man die **Summe in eine Klammer** setzen. **Klammern werden zuerst berechnet!**

Richtig: $(8+2)\cdot 5=10\cdot 5=50$

(3) **Potenz vor Punkt:** In $3\cdot 5^2$ wird zuerst die Potenz $5^2=5\cdot 5=25$ berechnet. und nicht das Produkt $3\cdot 5=15$.

Richtig: $3\cdot 5^2=3\cdot 25=75$
Falsch: $3\cdot 5^2=15^2=15\cdot 15=225$

(4) **Summanden dürfen vertauscht werden (Kommutativgesetz):**

Erlaubt: $26+51=51+26$

(5) **Faktoren dürfen vertauscht werden (Kommutativgesetz):**

Erlaubt: $\frac{1}{2}\cdot 3=3\cdot\frac{1}{2}$

(6) **Die Zahlen einer Differenz dürfen nicht vertauscht werden:**

Falsch: $\underbrace{20-8}_{12}=\underbrace{8-20}_{-12}$

Fasst man aber die Differenz als eine Summe von Zahlen auf, dann darf man die Zahlen vertauschen, muss aber Minuszeichen als Vorzeichen der vertauschten Zahlen ansehen:

Richtig: $20-8=-8+20$

(6) In Summen mit mehr als 2 Summanden / Produkten mit mehr als 3 Faktoren darf man Klammern setzten, wie es günstig ist.

Richtig: $28+67+13=28+(67+13)=28+80=108$

Übungen mit Rechenvorteilen

a) $14+72+16=14+16+72=30+72=102$

Ich habe 72 und 16 vertauscht und dann (in Gedanken) um 14 + 16 eine Klammer gesetzt und damit diese Summe zuerst berechnet.

Dies bringt den Vorteil, dass 14 + 16 direkt berechnet wird, was die Rechnung einfacher gestaltet, als wenn man der Reihe nach rechnet:
$14+72+16=86+16=102$.

b) $4\cdot 28\cdot \frac{3}{7}$. Hier setzt man (in Gedanken) eine Klammer um die hinteren Faktoren und rechnet also so: $4\cdot\left(28\cdot\frac{3}{7}\right)=4\cdot(4\cdot 3)=4\cdot 12=48$,

denn man kann ja durch 7 kürzen: $\cancel{28}^{4}\cdot\frac{3}{\cancel{7}_{1}}=4\cdot 3=12$

c) $-53+28+63=63+(-53)+28=63-53+28=10+28=38$

Zuerst ist eine Summe aus den Zahlen -53, 28 und 63 gegeben.
In ihr darf man die Summanden beliebige anordnen. Also ziehe ich die 63 nach vorne.
Die Summe 63+(-53) berechnet man als Differenz 63-52=10, und man erhält Ergebnis.

d) $138+367-38$

Man weiß, dass man die Zahlen einer Subtraktion nicht vertauschen darf.
Daher fasst man die Subtraktion 367-38 als Summe auf:

$$138+367-38=138+367+(-38)$$

und vertauscht dann den 2. und 3. Summanden:

$$138+367-38=138+367+(-38)=\underbrace{138+(-38)}_{100}+367=467$$

Das schreibt man jedoch einfacher auf:

$$138+367-38=138-38+367=100+367=467\,.$$

Man muss es auch gar nicht aufschreiben, sondern berechnet den Wert auf diese Weise im Kopf.

e) $(5\cdot 2)^2-5\cdot 2^2=10^2-5\cdot 4=100-20=80$

Aufgabe 1 **Berechne günstig – ohne Taschenrechner**

a) $266+379+34+21$

b) $338+59-28-29$

c) $-188-256-42-334$

d) $412-145-202-55$

e) $3\cdot 4^2-4\cdot 3^2$

f) $(-5)^3+5\cdot 5^2$

g) $9\cdot 15\cdot \frac{2}{45}$

g) $4\cdot 27\cdot 25\cdot \frac{1}{3}$

i) $8\cdot\frac{17}{4}+14\cdot\frac{13}{7}$

j) $\left(\frac{2}{3}\cdot 6+\frac{4}{7}\cdot 21\right)^2$

k) $\frac{3}{4}\cdot 8-\frac{2}{3}\cdot 15$

l) $5\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)+2\cdot\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{2}\right)$

2. Terme mit Variablen

Terme dürfen auch Variable enthalten.

Beispiele: $4x+2$ $\quad (x-2)\cdot x$ $\quad x^2-2x$ $\quad \frac{x-2}{x^2+4}$

$a(b+c)$ $\quad a\cdot b+a\cdot c$ $\quad a^b+c$ $\quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

Variable nennt man auch **Platzhalter**, weil sie einen Platz für eine Zahl freihalten.

Terme werden verwendet, um zu gegebenen Zahlen einen Wert zu berechnen

Beispiel 1: Wir verwenden jetzt diesen Term $4\cdot x+2$ und setzen diese Zahlen ein:

Für x = - 2 liefert der Term $4\cdot\boxed{-2}+2=-8+2=-6$

Für x = - 1 liefert der Term $4\cdot\boxed{-1}+2=-4+2=-2$

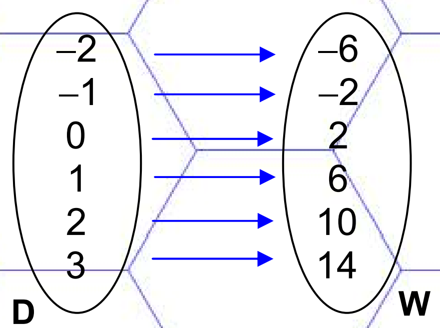
Für x = 0 liefert der Term $4\cdot\boxed{0}+2=0+2=2$

Für x = 1 liefert der Term $4\cdot\boxed{1}+2=4+2=6$

Für x = 2 liefert der Term $4\cdot\boxed{2}+2=8+2=10$

Für x = 3 liefert der Term $4\cdot\boxed{3}+2=12+2=14$

Der Term ordnet also diesen Zahlen jeweils einen eindeutigen Wert zu. Die Abbildung zeigt diese Zuordnungen als sogenanntes **Pfeildiagramm**.



Die Zahlen, die man für x einsetzen darf, nennt man **Definitionsmenge** oder **Definitionsbereich**. Hier war offenkundig $D=\{-2;-1;0;1;2;3\}$.

Durch diese Berechnungen wird jeder Zahl des Definitionsbereiches eine Zahl zugeordnet. Die zugeordneten Zahlen nennt man **die Werte des Terms**, und sie alle zusammen bilden die **Wertmenge W**.

Das **Ergebnis** unserer Rechnungen lautet also:

Zum Definitionsbereich $D=\{-2;-1;0;1;2;3\}$ gehört die Wertmenge $W=\{-6;-2;2;6;10;14\}$.

Übung: Gegeben ist der Term x^2-2x-1.

Berechne die Wertmenge zu $\mathbf{D}=\{-3;-2;\dots;2;3\}$.

Gib die Wertmenge an.

Lösung:

Zu x = -3 gehört: $(-3)^2 - 2\cdot(-3) - 1 = 9 + 6 - 1 = 14$

Zu x = -2 gehört: $(-2)^2 - 2\cdot(-2) - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$

Zu x = - 1 gehört: $(-1^2) - 2\cdot(-1) - 1 = 1 + 2 - 1 = 2$

Zu x = 0 gehört: $0^2 - 2\cdot 0 - 1 = -1$

Zu x = 1 gehört: $1^2 - 2\cdot 1 - 1 = 1 - 1 - 1 = -2$

Zu x = 2 gehört: $2^2 - 2\cdot 2 - 1 = 4 - 4 - 1 = -1$

Zu x = 3 gehört: $3^2 - 2\cdot 3 - 1 = 9 - 6 - 1 = 2$

Damit erhält man die Wertmenge $\mathbf{W} = \{14; 7; 2; -1; -2\}$

Hinweis: Die Mengenschreibweise ist nur aufzählend. Die Zahlen nicht zwingend geordnet zwischen den Mengenklammern, und Wiederholungen werden nicht notiert.

Beispiel 2: Berechnung von Werten mit dem Term $x^2 - 2x$: $D = \{-3; -1; 3; \frac{1}{2}\}$.

Für x = - 3 liefert der Term $\boxed{-3}^2 - 2\cdot\boxed{-3} = 9 + 6 = 15$

Für x = - 1 liefert der Term $\boxed{-1}^2 - 2\cdot\boxed{-1} = 1 + 2 = 3$

Für x = 3 liefert der Term $\boxed{3}^2 - 2\cdot\boxed{3} = 9 - 6 = 3$

Für x = $\frac{1}{2}$ liefert der Term $\boxed{\tfrac{1}{2}}^2 - 2\cdot\boxed{\tfrac{1}{2}} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

Wertmenge: $\mathbf{W} = \{15; 3; -\frac{3}{4}\}$

Beobachtung: Die Zahl 3 ist dabei zweimal als Wert aufgetreten. In der Wertmenge wird er jedoch nur einmal gelistet.

Es gibt auch **Bruchterme**: $\dfrac{2x+1}{x-2}$ mit $\mathbf{D} = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$

Jetzt wurde der **maximal mögliche Definitionsbereich** angegeben. Dabei geht man von der Menge „aller Zahlen“ aus. In Klasse 7 ist das die Menge $\mathbb{Q}$ aller **rationalen Zahlen,** das sind alle Zahlen, die man als Bruch darstellen kann, also alle abbrechenden oder periodischen Dezimalzahlen. Später lernt man, dass es weit mehr Zahlen gibt, die man aber weder als Bruch noch als periodische Dezimalzahl schreiben kann. Das sind dann die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$.
Dann würde man den maximalen Definitionsbereich so schreiben: $\mathbf{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Aber warum wurde die Zahl 2 ausgeschlossen?

Der Versuch, zu x = 2 einen Wert zu berechnen, scheitert nämlich:

$$\frac{2\cdot\boxed{2}+1}{\boxed{2}-2} = \cancel{\frac{3}{0}}$$ hat kein Ergebnis.

MERKE: Man kann nicht durch 0 dividieren.

Bruchterme werden ausführlich im Text 12111 behandelt.

Das war nur ein kleiner Ausblick.

Terme können auch mehrere Variable beinhalten.

Dies entspricht sogar noch viel eher den praktischen Anwendungen.

Beispiel: Man will die den zurückgelegten Weg eines Fahrzeugs berechnen. Dazu muss man seine Geschwindigkeit v und die Fahrzeit t kennen.

Die Berechnungsformel heißt: $s = v \cdot t$.

Der Weg, den man mit der Geschwindigkeit $v = 80\,\frac{km}{h}$ in $t = \frac{1}{2}\,h$ zurücklegt, ist dann: $s = 80\,\frac{km}{h} \cdot \frac{1}{2}\,h = 40\,km$

Oder Terme wie dieser: $x^2 + 2xy + y^2$

Um hiermit Werte zu berechnen muss man **für x und für y Zahlen einsetzen**.
Etwa: x = 3, y = 5: $3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 5^2 = 9 + 30 + 25 = 64$

Aufgabe 2 Berechne die Wertmenge zu

a) $4x^2 + 3x - 5$ mit $\mathbf{D} = \{-2; -1; 0; 1; 2; 5; 10\}$

b) $(2x-3)^2$ mit $\mathbf{D} = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

c) $\frac{2x+1}{3x-4}$ mit $\mathbf{D} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

d) $\frac{(4+x)^2}{x-4}$ mit $\mathbf{D} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

Aufgabe 3 Fülle die Tabellen mit den zugehörenden Werten

a) $5x - 3y$

y = \ x =	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

b) $\frac{x \cdot y}{x+y}$

y = \ x =	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

Terme kann man auch als Text umschreiben
Wie kann der zugehörige Term aussehen?

Gegeben sei eine beliebige Zahl (wir schreiben dafür dann x).

(1) Addiere 3. (2) Multipliziere mit 2. (3) Dividiere durch 4.

(4) Verdopple die Zahl und subtrahiere 5.

(5) Subtrahiere die Zahl von 20 und verdreifache das Ergebnis.

(6) Addiere 4 und multipliziere das Ergebnis mit der um 3 verkleinerten Zahl.

(7) Addiere diese Zahl zu ihrem Kehrwert und quadriere dann.

Und so könnten die zugehörenden Terme aussehen:

(1) $x + 3$ (2) $x \cdot 2$ oder $2x$ (3) $x : 4$ oder $\frac{x}{4}$

(4) $2x - 5$ (5) $(20 - x) \cdot 3$ oder $3(20 - x)$ (6) $(x + 4) \cdot (x - 3)$

(7) $\left(\frac{1}{x} + x\right)^2$

Aufgabe 4 Gib den jeweiligen Term an.

a) Zum Fünffachen einer Zahl wird 8 addiert.

b) Subtrahiere von einer Zahl 8 und verdopple dann.

c) Subtrahiere vom Produkt zweier Zahlen ihre Summe.

d) Denke Dir eine Zahl, addiere 4, verdopple die Summe, subtrahiere dann die Hälfte der Zahl.

e) Dividiere 48 durch eine gedachte Zahl, addiere zum Ergebnis das Vierfache der Zahl.

f) Eine Zahl wird einmal verdoppelt, dann mit vier multipliziert. Dann multipliziert man die Ergebnisse und quadriert am Ende.

Aufgabe 5 Gib den jeweiligen Term an.

a) Zum Nettopreis eines Gegenstandes kommt die Mehrwertsteuer in Höhe von 19% dazu. Mit welchem Term, kann man den Bruttopreis berechnen?

b) Welcher Term berechnet aus dem Bruttopreis eines Gegenstandes die Höhe der darin enthaltenen Mehrwertsteuer?

c) Der Preis eines Gegenstands wird zuerst um 20% erhöht, nach 1 Monat wird der Preis wieder um 20% gesenkt. Welcher Term berechnet den Endpreis?

3. Äquivalenzumformung von Termen

Genauso wie man Zahlenterme durch Berechnung vereinfachen kann: $20-3\cdot 5$ wird 5, kann man auch viele Terme zusammenfassen zu einfacheren Termen.

Beispiel 1: $4x+7x-8x=3x$ Die meisten werden sagen, na klar doch!

Es gibt zwei Methoden, wie man das überprüfen kann, wenn man sich nicht sicher ist:
Die erste kann jeder zum TESTEN anwenden und ist ganz einfach:

Überprüfung durch eine Wertberechnung für eine beliebige Zahl:

Man wählt für x eine beliebige Zahl und berechnet dazu den Wert mit Hilfe des ursprünglichen Terms aber auch mit dem vereinfachten Term. Beide müssen gleich sein!

$x=3$ Gegebener Term: $4\cdot\boxed{3}+7\cdot\boxed{3}-8\cdot\boxed{3}=12+21-24=33-24=9$

Vereinfachter Term: $3\cdot\boxed{3}=9$.

MERKE: Eine Umformung oder Vereinfachung ist nur dann algebraisch zulässig, wenn der neue Term dieselben Werte liefert.

Terme, welche dieselben Werte liefern, heißen gleichwertige Terme, oder (vornehmer formuliert) **äquivalente Terme**.

Zumindest für die Zahl 3 liefern also beide Terme denselben Wert. Das lässt zumindest vermuten, dass man eine **Äquivalenzumformung** vorgenommen hat.

Die zweite Methode ist ein Beweis mit Hilfe des Distributivgesetzes.

Fortgeschrittene sollten sich über das Folgende im Klaren sein, Anfänger können es überspringen.

Verstehen!

Das Distributivgesetz (Verteilungsgesetz) lautet als Formel so:

$$a\cdot(b+c)=\boxed{a}\cdot b+\boxed{a}\cdot c$$

Wendet man es von links nach rechts an, dann bedeutet es:

Man darf einen Faktor vor einer Klammer in diese hinein multiplizieren.
Er wird dann mit jeder Zahl in der Klammer multipliziert:

$$5\cdot(4x+3)=5\cdot 4x+5\cdot 3=20x+15$$

Unbewusst wendet man dieses Gesetzt jedoch viel öfter von rechts nach links an.

In dieser Form besagt es, dass man **einen gemeinsamen Faktor ausklammern** darf!

Ein banales Beispiel heißt: Wie viel sind 7 € + 3 €? Jeder sagt sofort 10 €.

Bei der Berechnung ignoriert man zunächst die Maßeinheit € und addiert nur die Beträge.

Mathematisch gesehen ist dies jedoch ein Ausklammern der Maßeinheit gemäß dem Distributivgesetz: $7\,€+3\,€=(7+3)\,€=10\,€$

Algebraisches Beispiel: $7x+3x=(7+3)x=10x$

Und genau so kann man unsere anfängliche Termumformung **beweisen**:

$$4x+7x-8x=\underbrace{(4+7-8)}_{3}\cdot x=3x$$

Beispiel 2: $4x+7y-8x+3y=(4x-8x)+(7y+3y)=-4x+10y$

Zuerst wurden die x-Terme geordnet und zusammengerechnet, dann die y-Terme.

Mehr geht nicht, denn es gibt keine Möglichkeit, -4x und 10y noch zusammenzufassen!

Man kann nur Terme mit derselben Variablen zusammenrechnen.

Schüler versuchen gerne, auch verschiedene Variable zusammenzufassen.
Dabei lassen sie ihrer Fantasie freien Lauf und machen ***Fehler*** wie diesen:

Fehler-Beispiel 3: $3x+2y=5xy$

Wenn man sich nicht sicher ist, kann man, wie zuvor gezeigt, Zahlen einsetzen und so mit der linken und mit der rechten Seite getrennt Werte berechnen und vergleichen:

$x=2$ und $y=5$; Gegebener Term: $3x+2y \to 3\cdot\boxed{2}+2\cdot\boxed{5}=6+10=16$

Umgeformter Term: $5xy \to 5\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{5}=50$.

Da diese beiden Werte verschieden sind, war die Umformung unzulässig, besser gesagt, es war keine Äquivalenzumformung, also falsch!

Ich werde immer wieder gefragt, ob man bei einer solchen Überprüfung durch willkürliche Zahlen auch Pech haben kann, weil man zufällig zwei Zahlen für x und y verwendet, bei denen beide Terme doch dasselbe Ergebnis liefern, obwohl die Umformung unzulässig war.

Ja, es gibt dazu unendlich viele Paare, die zu so einem Missgeschick führen und uns damit täuschen. Ein Paar will ich nennen:

$x=2$ und $y=\frac{3}{4}$ Gegebener Term: $3x+2y \to 3\cdot\boxed{2}+2\cdot\boxed{\tfrac{3}{4}}=6+\frac{3}{2}=\frac{12}{2}+\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$

Umgeformter Term: $5xy \to 5\cdot\boxed{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}$.

Das sollte man wissen:

Diese Umformungen sind zur Termumformung erlaubt´(Äquivalenzumformungen)

1. Vertauschen von Summanden: $2x+x^2=x^2+2x$ (Kommutativgesetz)
2. Vertauschen von Faktoren: $x\cdot 3=3x$ (Kommutativgesetz)
3. Zusammenfassen von Summanden oder Faktoren durch Klammern (Assoziativgesetz)

   $19x+17x+3x=19x+(17x+3x)=19x+20x=39x$

   Damit wurde die Berechnung erleichtert gegenüber dem Rechnen der Reihe nach.

   $15\cdot 21\cdot\frac{2}{7}=15\cdot\left(21\cdot\frac{2}{7}\right)=15\cdot 6=90$ ist **einfacher** als $15\cdot 21\cdot\frac{2}{7}=(15\cdot 21)\cdot\frac{2}{7}=315\cdot\frac{2}{7}=90$
4. Anwendung des Distributivgesetzes; $a\cdot(b+c)=ab+ac$.

   Von links nach rechts: $5\cdot(2x-3)=10x-15$ Ausmultiplizieren

   Von rechts nach links: $13x+8x=(13+8)x=21x$ Ausklammern

Weitere Umformungsregeln kommen in den nächsten Abschnitten.